ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1981

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

De plus, dans les sujets comportant une application numérique, celle-ci peut généralement être traitée indépendamment du reste de l'exercice.

Rappel : Log désigne le logarithme népérien.

SUJET N° 1 -

1/ Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2xt + 1}$$

Après avoir rapidement prouvé la convergence de cette intégrale impropre, calculer $F(x)$ au moyen d'une primitive.

2/ On pose alors, pour tous réels a et b tels que $a^2 - 4b < 0$:

$$G(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + at + b} .$$

Donner pour G une expression très simple utilisant F.

3/ Avec $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\phi(X) = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + aX + b)(X^2 - aX + b)} .$$

4/ Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + \frac{1}{2}$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.;

5/ Calculer enfin, en utilisant le résultat précédent, la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + \sin^4 \varphi}$$

On donnera pour I, outre la formule explicite, la valeur numérique à 5 décimales.

T.S.V.P.

SUJET N° 2 -

Pour tout nombre réel α strictement positif et tout vecteur $\vec{V} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose, quand cela a un sens :

$$N_\alpha(\vec{V}) = \sup_{t \in \mathbb{R}^*} \frac{|x + yt|}{1 + |t|^\alpha} .$$

1/ Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application N_α est définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2/ Vérifier que N_α est alors une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Dessiner la « boule-unité » B_2 de N_2, c'est-à-dire les (x,y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $N_2(\vec{V}) \leqslant 1$. On précisera la nature géométrique de B_2.

SUJET N° 3 -

Le but ici poursuivi est le calcul, pour tout entier $k \geqslant 2$, de la somme de la série évidemment convergente :

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(k^2n^2 - 1)} .$$

On posera :

$$a_n = \frac{1}{nk(nk + 1)(nk - 1)} , \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{nk+1} .$$

1/ Quel est le rayon de convergence R de la série entière $f(x)$? La fonction $f(x)$ est-elle continue sur $[0,R]$?

2/ En utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\phi(X) = \frac{1}{X(X - 1)(X + 1)} .$$

et en mettant $f(x)$ sous forme intégrale, ou autrement, prouver que S_k peut s'écrire sous la forme

$$a\int_0^1 \frac{t^b(1 - t)^c}{1 - t^d}\, dt .$$

3/ Calculer alors S_2, S_3 et S_4 explicitement. Quelles sont leurs valeurs numériques à 5 décimales ?

4/ Déterminer $\ell = \lim_{k \to \infty} S_k$.

5/ Donner un équivalent simple de $\ell - S_k$ sous la forme $\frac{A}{k^\alpha}$; on précisera A et α à 2 décimales.

SUJET N° 4 -

Soit (&) l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$x^2 y' + (x-1)y + 1 = 0 \ .$$

1/ Déterminer l'expression générale des solutions sur l'intervalle $]0,\infty[$. On la mettra sous la forme

$$y = f_c(x) = g(x) \cdot (C + \int_1^x h(t)\,dt) \ , \ C \in R \ ,$$

où g et h sont des fonctions que l'on explicitera.

2/ Quelles sont les valeurs de la constante C telles que la solution $f_c(x)$ correspondante soit prolongeable par continuité à droite en $x = 0$? Dans ces conditions calculer $f_c(0)$.

3/ S'il existe pour (&) une solution développable en série entière $\sum a_n x^n$, déterminer par récurrence la valeur de a_n. Conclusion ?

4/ Calculer la valeur de $f_0(\frac{1}{2})$ à 2 décimales. On précisera la méthode numérique employée (il n'existe pas de primitive élémentaire utilisable).

SUJET N° 5 -

On pose :

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \quad , \quad R_n = \int_0^1 \frac{t^{2n} \operatorname{Log}(\frac{1}{t})}{1+t^2}\,dt \ ,$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1/ Démontrer la formule :

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arc\,tg}\, x}{x}\,dx = G_n + (-1)^n R_n \ .$$

2/ Cette formule au besoin admise, montrer que R_n admet une limite très simple que l'on déterminera. On pourra pour cela montrer que $\varphi(t) = -t^2 \operatorname{Log} t$, avec $\varphi(0) = 0$, est bornée sur $[0,1]$.

3/ En déduire la valeur de l'intégrale I à 2 décimales (on ne cherchera pas de primitive).

4/ Établir une relation très simple entre I et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt$.

5/ Prouver plus précisément l'existence de constantes A, B, C et d'une suite $\mathcal{E}(n)$, tendant vers 0, telles que

$$R_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{\mathcal{E}(n)}{n^2} \ .$$

Donner la valeur de ces constantes.

——— XOX ———

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail